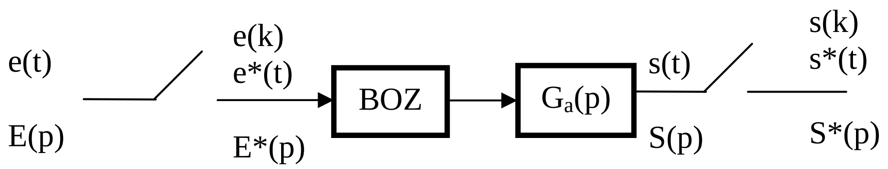
Chapitre 3. Représentation des systèmes échantillonnés

3.1 Introduction

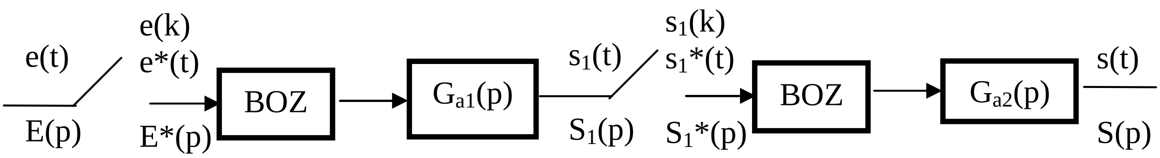
Un système en boucle ouverte ou un asservissement (système en boucle fermée) comportant un échantillonneur est dit échantillonné. Dans ce chapitre, nous allons étudier les modèles utilisés pour représenter les systèmes ou les asservissements échantillonnés ainsi que les méthodes de calcul des fonctions de transfert.

a) Exemples de systèmes échantillonnés en boucle ouverte

1)

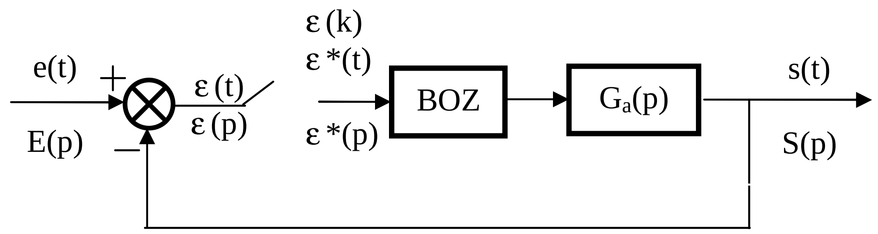


2)

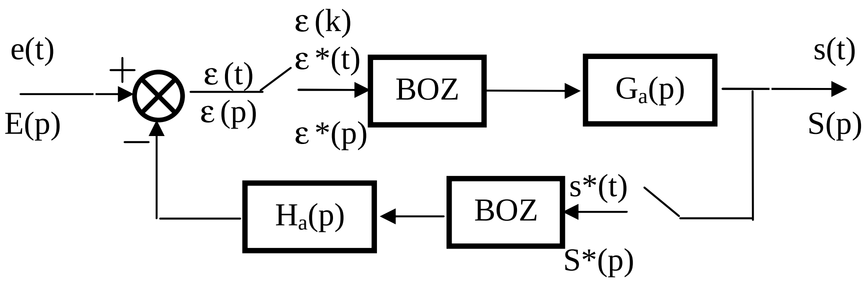


b) Exemples d'asservissements échantillonnés

1)



2)



3.2 Représentation d'un système discret (échantillonné/numérique) par une équation aux différences (équation de récurrence)

Un système linéaire discret est décrit par une équation de récurrence (l'équivalent de l'équation différentielle dans le domaine analogique) linéaire à coefficients constants reliant sa sortie s(k) à son entrée e(k). La forme générale de cette équation aux différences est:

$$a_n\, s(k+n) + a_{n-1}\, s(k+n-1) + \ldots + a_1\, s(k+1) + a_0\, s(k) = b_m\, e(k+m) + \ldots + b_1\, e(k+1) + b_0\, e(k)$$

L'ordre du système étant $n \geq m$ (système causal).

Le système est dit **causal** si les sorties dépendent uniquement des événements passés.

A partir de l'équation de récurrence, on peut calculer toutes les valeurs de la sortie s(k), si on connaît l'entrée e(k) et les conditions initiales s(0),…., s(n-1).

3.3 Fonction de transfert (transmittance) en z d'un système discret (échantillonné / numérique):

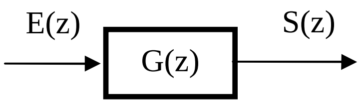
En appliquant la transformée en z à l'équation aux différences précédente, sous l'hypothèse que les conditions initiales sont nulles (s(0)=s(1)=…=s(n-1)=u(0)=u(1)=…=u(m-1)=0), on obtient la fonction de transfert échantillonnée (discrète/numérique) du système :

$$a_n\, z^n S(z)+a_{n-1}\, z^{n-1} S(z)+\ldots..+a_1\, z\, S(z)+a_0\, S(z)= b_m\, z^m E(z)+\ldots+b_1\, z\, E(z)+b_0\, E(z)$$

d'où:

$$G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$

qui est la fonction de transfert en z du système échantillonné (discret).



La fonction de transfert est une fraction rationnelle:

$$G(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

N(z) et D(z) sont des polynômes en z de degrés respectifs n et m.

La factorisation du numérateur et du dénominateur conduit à la forme suivante:

$$G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{b_m}{a_n}\,\frac{(z-z_1)(z-z_2)....(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)....(z-p_n)}$$

Avec: p_i , i=1,..,n sont les pôles, z_i , i=1,..,m sont les zéros.

- **Les pôles**: sont les racines du dénominateur.
- **Les zéros**: sont les racines du numérateur.

La fonction de transfert G(z) peut aussi être écrite sous la forme standard suivante:

$$G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{K}{(z-1)^m}\;z^{-r}\;\frac{N(z)}{D(z)}$$

où :

m : est le nombre d'intégrateurs (pôles z=1).

K est le gain, avec : $K=\lim\limits_{z\to 1}\,(z-1)^m G(z)$.

r : retards purs de r périodes.

Remarque :

-si m=0 (absence d'intégrateurs), K est appelé gain statique.

-si m=1, K est appelé gain de vitesse.

-si m=2, K est appelé gain d'accélération.

Exemple:

Soit un système numérique décrit par l'équation de récurrence suivante :

y(k+3)-1.5 y(k+2)+0.5 y(k+1)=2 u(k+3)-0.6 u(k)

1- Déterminer la fonction de transfert $G(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}$.

2- Mettre G(z) sous la forme standard.

Solution:

En appliquant la TZ, en considérant les conditions intiales nulles, on obtient:

$z^3\,Y(z)-1.5\,z^2\,Y(z)+0.5\,z\,Y(z)=2\,z^3\,U(z)-0.6\,U(z)$

La fonction de transfert est :

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{2z^3-0.6}{z^3-1.5z^2+0.5z}$$

-La forme standard :

$$G(z)=z^{-1}\,\frac{2z^3-0.6}{z^2-1.5z+0.5}=z^{-1}\,\frac{2z^3-0.6}{(z-1)(z-0.5)}$$

On constate que G(z) possède un intégrateur (pôle en z=1). Le gain de vitesse K est donné comme suit :

$$K = \lim_{z\to 1} (z-1)G(z) = 2.8$$

D'où :

$$G(z) = \frac{2.8}{(z-1)} z^{-1} \frac{2z^3 - 0.6}{2.8z - 1.4}$$

Remarque : La fonction de transfert peut être formulée en z^{-1}. Cette formulation en z^{-1} est obtenue à partir de la fonction de transfert en z, comme suit :

$$G(z) = \frac{z^{-n}}{z^{-n}} \frac{b_m z^m + ... + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} = \frac{b_m z^{m-n} + ... + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + ... + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}}$$

Exemple : Ecrire la fonction de transfert de l'exemple précédent en fonction de z^{-1}

Solution :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2z^3 - 0.6}{z^3 - 1.5z^2 + 0.5z} \frac{z^{-3}}{z^{-3}} = \frac{2 - 0.6z^{-3}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

3.4 Réponse d'un système échantillonné (discret)

On peut connaitre la réponse d'un système discret à une entrée donnée, soit à partir de son équation de récurrence, soit à partir de la fonction de transfert en calculant la transformée en z inverse de S(z)=G(z)E(z), c'est-à-dire: $s(k) = Z^{-1}\{G(z)E(z)\}$.

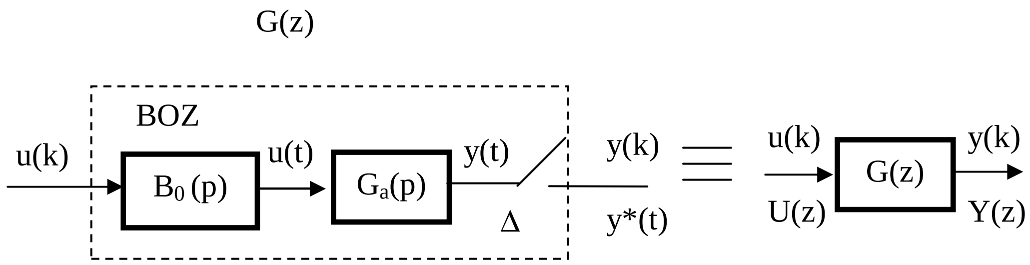
3.5 Retard pur : un système discret (échantillonné) d'entrée e(k) et de sortie s(k), de fonction de transfert $G(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$ présente un retard pur de r périodes d'échantillonnage, si G(z) peut se mettre sous la forme : $G(z)=z^{-r}G'(z)$.

Exemple :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-2} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}$$

3.6 Fonction de transfert échantillonnée (discrète/numérique) d'un système analogique muni d'un bloqueur d'ordre zéro :

Un système en boucle ouverte échantillonné muni d'un BOZ est représenté par la figure suivante :



Avec : $G_a(p)$ est la fonction de transfert du système analogique.

$B_0(p)$ est la fonction de transfert du BOZ, $B_0(p) = \dfrac{1 - e^{-\Delta p}}{p}$.

Le système analogique, muni d'un BOZ et dont la sortie est échantillonnée, devient un système échantillonné (discret/numérique). Sa fonction de transfert est: $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$.

Posons : $G(p)= B_0(p)\, G_a(p)$. La fonction de transfert échantillonnée est:

$$G(z) = Z\{G(p)\} = Z\{B_0(p) G_a(p)\} = Z\left\{\frac{G_a(p)}{p} - e^{-\Delta p}\frac{G_a(p)}{p}\right\}$$

Soit : $H(p) = \dfrac{G_a(p)}{p}$

Il en résulte :

$$G(z) = Z\{G(p)\} = Z\{H(p)\} - Z\left\{e^{-\Delta p} H(p)\right\}$$

$H(p)$ représente la transformée de Laplace de la fonction $h(t)$ et sa TZ est $H(z)$.

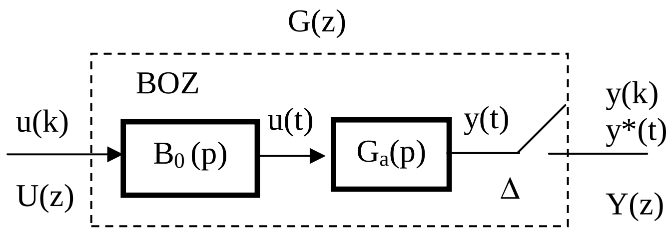
$e^{-\Delta p}H(p)$ représente la fonction du temps $h(t)$ mais retardée d'une période d'échantillonnage Δ, i.e, $h(t - \Delta)$, ce qui se traduit dans le plan z par la multiplication par z^{-1}, donc:

$$G(z) = H(z) - z^{-1}H(z) = \underbrace{(1 - z^{-1})H(z)}_{G(z)} = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\}$$

D'où:

$$G(z) = \frac{z - 1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\}$$

3.6.1 La fonction de transfert d'un système analogique du premier ordre échantillonné et muni d'un BOZ:



Avec : $G_a(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$ est la fonction de transfert du système analogique.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{K}{p(1+\tau p)}\right\}$$

$$Z\left\{\frac{K}{p(1+\tau p)}\right\} = Z\left\{\frac{K/\tau}{p(p+\frac{1}{\tau})}\right\} = \mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(-\frac{1}{\tau})$$

$$\mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(-\frac{1}{\tau}) = \lim_{p\to 0} \frac{K/\tau}{(p+\frac{1}{\tau})} \frac{z}{z-e^{\Delta p}} + \lim_{p\to -\frac{1}{\tau}} \frac{K/\tau}{p} \frac{z}{z-e^{\Delta p}} = \frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-e^{-\Delta/\tau}}$$

D'où

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-e^{-\Delta/\tau}}\right] = K\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{\tau}}}{z-e^{-\frac{\Delta}{\tau}}}$$

Remarque : La forme canonique de la fonction de transfert d'un système du premier ordre échantillonné (numérique) est :

$$G(z) = K\frac{1-z_0}{z-z_0},\ z_0 = e^{-\frac{\Delta}{\tau}} \quad \text{ou} \quad G(z) = K\frac{b_0}{z+a_0},\ b_0 = 1-z_0, a_0 = -e^{-\frac{\Delta}{\tau}}$$

On constate que la fonction de transfert G(z) est aussi du premier ordre. Elle dépend de la période d'échantillonnage Δ.

G(z) a pour pôle : $p = e^{-\frac{\Delta}{\tau}} = e^{p_a \Delta}$, avec $p_a = -\dfrac{1}{\tau}$ est le pôle du système analogique.

Le gain statique est donné par K=G(1).

La période d'échantillonnage Δ doit vérifier la condition suivante :

$$\frac{1}{4} < \frac{\Delta}{\tau} < 1 \quad \text{(Selon le théorème de Shannon)}$$

3.6.2 La fonction de transfert d'un système analogique du 2[ieme] ordre échantillonné et muni d'un BOZ:

La fonction de transfert d'un système du deuxième ordre analogique est :

$$G_a(p) = \frac{K}{1 + \frac{2h}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \text{, avec } h<1$$

Avec : K est le gain statique, h: coefficient d'amortissement, ω_n : pulsation propre (rad/s).
La fonction de transfert d'un système du 2[ieme] ordre échantillonné est :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\}$$

On a 2 formes canoniques pour G(z):

$$G(z) = K \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \quad \text{ou} \quad G(z) = Kb_1 \frac{z - z_0}{(z - z_1)((z - \bar{z}_1)}$$

Avec : $a_0 = e^{-2h\,\omega_n \Delta}$, $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-h^2}$, $a_1 = -2\sqrt{a_0}\cos(\omega_p \Delta)$

$$b_0 = a_0 + \sqrt{a_0}\left[h \frac{\omega_n}{\omega_p}\sin(\omega_p \Delta) - \cos(\omega_p \Delta)\right],\ b_1 = 1 - \sqrt{a_0}\left[h \frac{\omega_n}{\omega_p}\sin(\omega_p \Delta) + \cos(\omega_p \Delta)\right]$$

$$z_0 = -\frac{b_0}{b_1},\ z_1 = e^{(-h\omega_n + j\omega_p)\Delta} = e^{p1\Delta},\ \bar{z}_1 = e^{(-h\omega_n - j\omega_p)\Delta} = e^{p2\Delta}.$$

Avec p_1 et p_2 sont les pôles du système continu $G_a(p)$.

Lors de l'échantillonnage d'un système analogique du 2[ieme] ordre, la période d'échantillonnage doit vérifier la condition:

$$0.25 < \Delta\omega_n < 1.25$$

Remarque : Les pôles d'un système analogique se transforment lors de l'échantillonnage. Les pôles d'un système analogique sont reliés à ceux de son modèle échantillonné par la relation suivante:

$$z = e^{-p\Delta}$$

3.7 Passage de la transformée de Laplace à la transformée en z

Soit S*(p) la transformée de Laplace d'un signal échantillonné s*(t) à la période Δ, alors :

$$S^*(p) = L\{s^*(t)\} = \int_0^{+\infty} s^*(t)\, e^{-pt}\, dt$$

Le signal s*(t) est non nul que pour certaines valeurs discrètes du temps. D'où :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k)\, e^{-pk\Delta}$$

En posant $z = e^{p\Delta}$, on obtient :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k)\, z^{-k} = S(z) = Z\{S(p)\}$$

Remarque : L'opération d'échantillonnage (*) est caractérisée par les propriétés suivantes :

(f*)*=f*

(f*. g)*=f*. g*

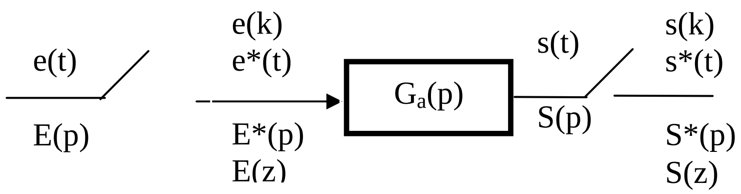
$(f.g)^* \neq f^*.g^*$

3.8 Fonctions de transfert (transmittances) échantillonnées des systèmes en boucle ouverte et des asservissements

Des que l'on a au moins un échantillonneur dans un système, on utilise la transformée en z. C'est- à- dire les fonctions de transfert seront en z.

3.8.1 Systèmes en boucle ouverte

- **Système 1**



Avec $S(z) = Z\{s(k)\} = Z\{S(p)\}$ et S(z)=S*(p).

$E(p) = L\{e(t)\}$

Le système continu de fonction de transfert G(p) contient un BOZ, c'est-à-dire:

$G(p)= B_0(p) F(p)$.

- Calcul de la fonction de transfert du système 1 : $\dfrac{S(z)}{E(z)}$

On a : S(p)=G(p) E*(p)

S*(p)=(G(p) E*(p))*=G*(p) E*(p)

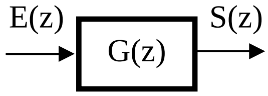
D'où:

$$G^*(p) = \frac{S^*(p)}{E^*(p)} \Rightarrow G(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

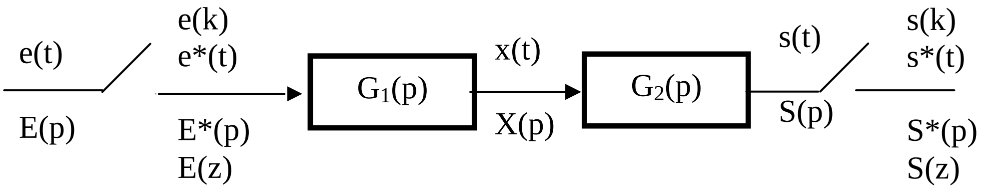
Avec $G(z) = Z\{G(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{F(p)}{p}\right\}$

Donc:

Système 1 $\equiv$



- **Système 2**



Où : $G_1(p) = B_0(p)\ F(p)$.

- Calcul de la fonction de transfert du système 2 : $\frac{S(z)}{E(z)}$

On a : $S(p)=G_2(p)\ X(p)= G_2(p)\ G_1(p)\ E^*(p)$

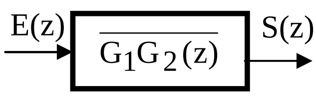
$S^*(p)= (G_2(p)\ G_1(p)\ E^*(p))^*= (G_2(p)\ G_1(p)\ )^*\ \ E^*(p)$

$S(z) = \overline{G_1 G_2}(z)\ \ E(z)$

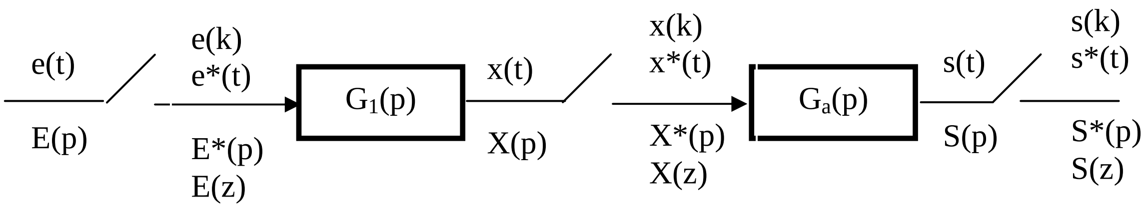
$\frac{S(z)}{E(z)} = \overline{G_1 G_2}(z)$

Avec $\overline{G_1 G_2}(z) = Z\{G_1(p) G_2(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{F(p) G_2(p)}{p}\right\}$

Système 2 $\equiv$



- **Système 3**



où : $G_1(p) = B_0(p)\, F_1(p)$ et $G_2(p) = B_0(p)\, F_2(p)$.

- Calcul de la fonction de transfert du système 3 : $\dfrac{S(z)}{E(z)}$

On a : $S(p)=G_2(p)\, X^*(p)$

$S^*(p)= (G_2(p)\, X^*(p))^*= G^*_2(p)\;\; X^*(p)$

$X(p)= G_1(p)\;\; E^*(p) \Rightarrow X^*(p)= G^*_1(p)\;\; E^*(p)$

D’où:

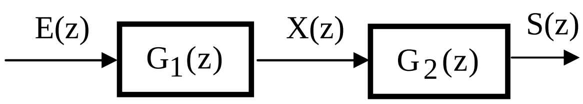
$S^*(p)= G^*_2(p)\, G^*_1(p)\, E^*(p)$

$\Rightarrow S(z) = G_1(z) G_2(z)\;\; E(z)$

$$\Rightarrow \frac{S(z)}{E(z)} = G_1(z) G_2(z)$$

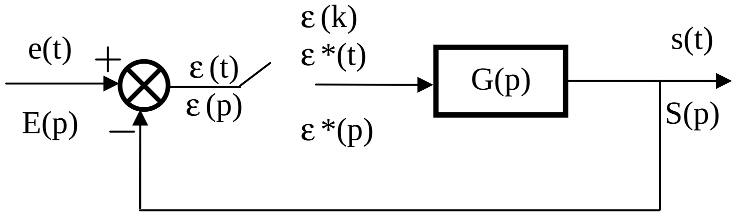
Avec $G_1(z) = Z\{G_1(p)\} = \dfrac{z-1}{z} Z\left\{\dfrac{F_1(p)}{p}\right\}$ et $G_2(z) = Z\{G_2(p)\} = \dfrac{z-1}{z} Z\left\{\dfrac{F_2(p)}{p}\right\}$

Système 3 $\equiv$



3.8.2 Systèmes en boucle fermée échantillonnés (asservissements échantillonnés)

- **Asservissement 1**



où : $G(p) = B_0(p)\, F(p)$.

- Calcul de la fonction de transfert : $\dfrac{S(z)}{E(z)}$

On a : $S(p)=G(p)\ \varepsilon^*(p) \Rightarrow S^*(p)= G^*(p)\ \varepsilon^*(p)$

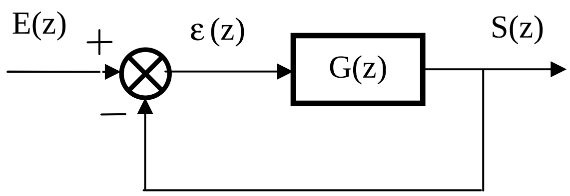
$\varepsilon\ (p)= E(p) - S(p) \Rightarrow \varepsilon^*(p)= E^*(p) - S^*(p)$

$S^*(p)= G^*(p)\ E^*(p) - G^*(p)\ S^*(p)$

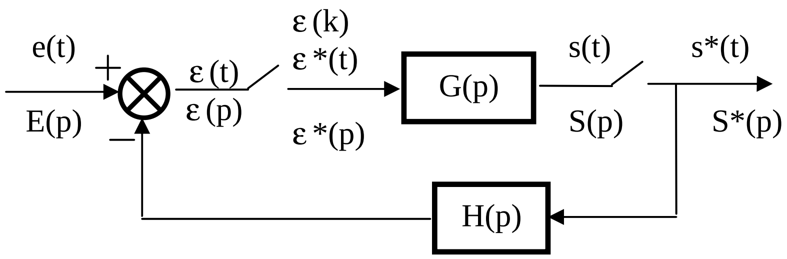
$$\frac{S^*(p)}{E^*(p)} = \frac{G^*(p)}{1+G^*(p)} \Rightarrow \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

Avec $G(z) = Z\{G(p)\}$ est la fonction de tranfert en BO.

Asservissement 1 $\equiv$



- **Asservissement 2**



Où : $G(p) = B_0(p)\ F_1(p)$ et $H(p) = B_0(p)\ F_2(p)$.

- Calcul de la fonction de transfert de l'asservissement : $\dfrac{S(z)}{E(z)}$

On a : $S(p)=G(p)\ \varepsilon^*(p) \Rightarrow S^*(p)= G^*(p)\ \varepsilon^*(p)$

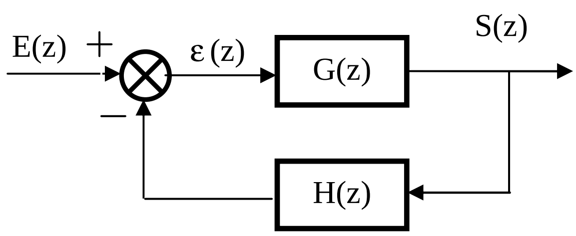
$\varepsilon\ (p)= E(p)- H(p)\ S^*(p) \Rightarrow \varepsilon^*(p)= E^*(p)- H^*(p)\ S^*(p)$

$S^*(p)[1+G^*(p)H^*(p)]= G^*(p)E^*(p)$

$$\frac{S^*(p)}{E^*(p)} = \frac{G^*(p)}{1+G^*(p)H^*(p)} \Rightarrow \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}$$

Avec $G(z) = Z\{G(p)\}$ et $H(z) = Z\{H(p)\}$. G(z)H(z) est la fonction de transfert en BO.

Asservissement 2 $\equiv$



Références

1- A. Jutard, M. Betemps, Systèmes asservis linéaires échantillonnés, institut national des sciences appliquées, Lyon, 1998.

2- D. Peaucelle, Systèmes à temps discret, Commande numérique des procédés, 2003.

3- Maurice Rivoire, Jean Louis Ferrier, Commande par calculateur. Identification, Eyrolles, 1998.

4- R. Longchamp, Commande numérique de systèmes dynamiques, P. P. U. R., 1995.

5- I. D. Landau, Identification et commande des systèmes, Hermès, 1993.

6- Y. Granjon, Automatique-Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, Cours et exercices corrigés, 2ieme édition, Dunod, Paris, 2001, 2010.

7- C. L. Phillips, H. T. Nagle, Digital control system- analysis and design, Prentice Hall, 1990.